Exercice 1 :(4 points)

Choisir la bonne réponse en justifiant votre choix.

On s'intéresse à la durée de vie , exprimée en année, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une probabilité p qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) La valeur de t pour laquelle p([0, t [ ) = p([t, +∞[ ) est :

a) $\frac{ln2}{\lambda}$ b) $\frac{\lambda}{ln2}$ c) $\frac{\lambda}{2}$

2) D'après une étude statistique , la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0.18. La valeur exacte de λ est alors :

a) $\ln\left(\frac{50}{41}\right)$ b) $\ln\left(\frac{41}{50}\right)$ c) $\ln\left(\frac{82}{100}\right)$

3) Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours de deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

a) P([1, +∞ [ ) , b) p ([3, + ∞[ ) c) p([2, 3 [ )

Dans la suite on prendra $\lambda = 0.2$.

4) La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondis à 10^{-4} près est :

a) 0.5523 b) 0.5488, c) 0.4512

5) Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années. La valeur la plus proche de la probabilité de l'événement : X =4 est :

a) 0.5555 b) 0.8022 c) 0.1607

Exercice 2:(3points)

Ali a créé un site web. Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre hebdomadaire de visiteurs de ce site au cours des huit premières semaines suivant sa création.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

1) a/ Représenter le nuage des points $M_i(x_i; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal, en prenant pour unités 1 cm pour une semaine sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 visiteurs sur l'axe des ordonnées.

b/ Déterminer les coordonnées du point moyen *G* de ce nuage de points, et le placer dans le repère précédent (on arrondira l'ordonnée du point *G* à l'unité près).

2) a/ Déterminer l'équation de la droite (*D*) d'ajustement affine de *y* en *x*, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients *a* et *b* seront arrondis à l'entier le plus proche.

b/ Tracer la droite (*D*) dans le repère précédent.

c/ En utilisant l'ajustement affine précédent, estimer le nombre de visiteurs lors de la dixième semaine suivant la création du site.

3) En remarquant que l'augmentation du nombre de visiteurs est plus faible sur les dernières semaines, on peut penser à faire un ajustement de type « logarithmique ».
Pour cela, on pose : $z = \ln(x)$.

a/ On donne le tableau suivant :

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,693		1,386	1,609		1,946	2,079
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

Préciser les valeurs manquantes z_3 et z_6 en arrondissant les résultats obtenus à 10^{-3} près.

b/ On admet que l'équation de la droite (*d*) d'ajustement affine de *y* en *z*, obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $y = 133z + 184$.
En utilisant ce résultat, procéder à une nouvelle estimation du nombre de visiteurs lors de la dixième semaine (le résultat sera arrondi à l'unité).

c/ À l'aide de ce nouvel ajustement, déterminer le rang de la semaine au cours de laquelle le nombre prévisible de visiteurs dépassera 600.

Exercice 3 :(4 points)

R = $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

1) On désigne par C_m la courbe d'équation : $mx^2 + y^2 = m$; où m est un paramètre réel.

a/ Déterminer, suivant les valeurs de m, la nature de la courbe C_m.

b/ Préciser les foyers et les sommets de C_m lorsque m > 1.

2) Soit H l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $\mathrm{Re}(z^2) = 1$.

a/ Montrer que $H = C_{-1}$

b/ Tracer H.

3) Soit Γ la courbe d'équation $x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 2 = 0$.

a/ Montrer que $M(z) \in \Gamma$ si et seulement si $\mathrm{Re}\,[\,(jz)^2\,] = 1$, avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b/ En déduire que Γ est l'image de H par une rotation r que l'on définira.

Exercice 4 :(4 points)

1) On considère dans Z x Z, l'équation (E) : $5x - 3y = 11$.
Montrer que (x, y) est solution de (E) si et seulement si
$x = 3k + 1$ et $y = 5k - 2$, où k est un entier relatif.

2) Pour tout entier relatif k on pose $d = (3k+1) \wedge (5k-2)$.
a/ Montrer que d = 1 ou d = 11.
b/ Montrer que d = 11 si et seulement si $k \equiv 7\ [11]$

3) Le plan étant munie d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
on désigne par Δ la droite d'équation $5x - 3y = 198$.

a/ Déterminer les points M de Δ dont les coordonnées (a, b) sont des entiers relatifs vérifiant $a \wedge b = 18$.

b/ Déterminer parmi ces points celui qui est le plus proche de O.

(indication ? : on pourra étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = 34x^2 - 14x + 5$)

Exercice 5 :(5 points)

Soit $n \in$ IN, on définit la fonction f_n sur IR+ par : $\begin{cases} f_n(x) = x^{n-2}e^{\frac{-1}{x}}\ si\ x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On pose : $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$ et $F_n(x) = \int_x^1 f_n(t)\,dt$ pour $x \in]\,0, 1]$.

1) Montrer que f_n est continue sur IR+.

2) a/ Sans chercher à calculer $F_n(x)$, justifier que $\lim_{x \to 0^+} F_n(x) = I_n$.

b/ Calculer $F_0(x)$ pour $x \in]\,0, 1]$. En déduire que : $I_0 = \frac{1}{e}$.

3) a/ Comparer $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$.
b/ En déduire la monotonie de la suite (I_n).

4) a/ Montrer que pour tout $x \in]\,0, 1]$, $x^n F_0(x) \le F_n(x) \le F_0(x)$.

b/ En déduire que pour tout $n \in$ IN ; $0 \le I_n \le \frac{1}{e}$ et que la suite (I_n) est convergente.

5) a/ Au moyen d'une intégration par parties , trouver une relation de récurrence entre $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$, pour $n \in$ IN et $x \in]\,0, 1]$.

b/ En déduire que pour $n \in$ IN, $I_n + n\,I_{n+1} = \frac{1}{e}$.

c/ Montrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

6) a/ Montrer par récurrence que pour $n \in$ IN* , $I_1 = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k! + (-1)^n n!\, I_{n+1}$.

b/ Déduire le terme général de la suite (I_n) en fonction de I_1.

Pr LATRACH — Synthèse III — 2011/2012 — 4M

Exercice 1

Qu	1	2	3	4	5
Rép	a	a	a	b	c

1) $p([0,t]) = p([t,+\infty[)$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-t\lambda} = e^{-t\lambda}$

$\Leftrightarrow 1 = 2e^{-t\lambda}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-t\lambda}$

$\Leftrightarrow -\ln 2 = -t\lambda$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\lambda}$

Rép (a)

2) $p(t \leq 1) = 0,18$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda} = 0,18$

$\Leftrightarrow 0,82 = e^{-\lambda}$

$\Leftrightarrow -\lambda = \ln\left(\frac{82}{100}\right)$

$\Leftrightarrow \lambda = \ln\left(\frac{50}{41}\right)$

Rép (a)

3) $p(T \geq 3 / T \geq 2)$

$= \frac{p(T \geq 3)}{p(T \geq 2)} = \frac{e^{-3\lambda}}{e^{-2\lambda}}$

$= e^{-\lambda}$

$= p([1; +\infty[$

Rép (a)

4) $p(T \geq 3) = e^{-3\lambda}$

$= e^{-3\times 0,2}$

$= e^{-0,6} = 0,5488$

Rép (b)

5) ~~p~~ X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,5488$

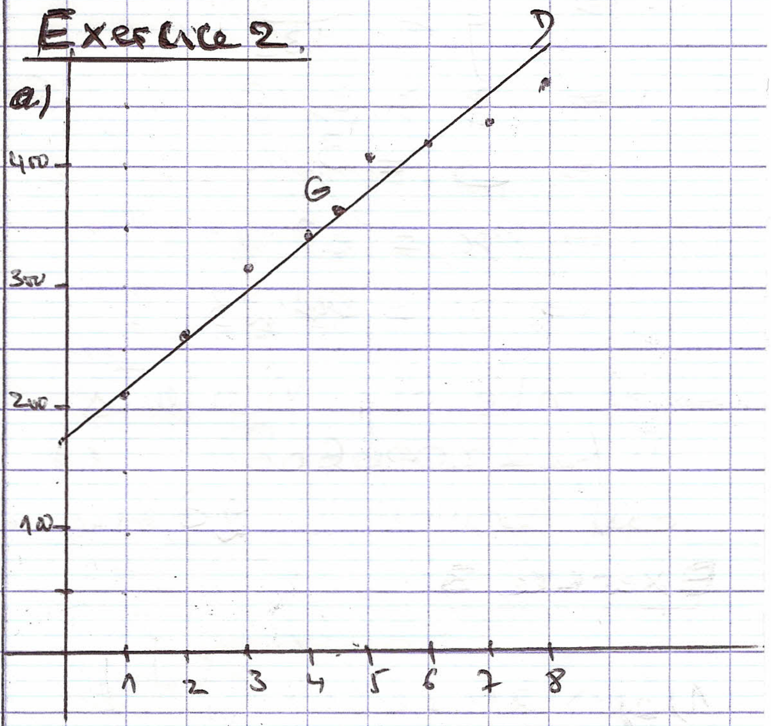
$\Rightarrow p(X=4) = C_{10}^{4}(0,5488)^4(1-0,5488)^6$

$= 0,1607$

Rép (c)

Exercice 2

a)



b) Coordonnées du pt G.

$\bar{x} = 4,5$

$\bar{y} = 360,125 = 360$

2) équation de D :

$a = 191$, $b = 38$

$\Rightarrow D : y = 191 + 38x$

c) Nbre de visiteurs au 10ème semaine

$y = 191 + 38\times 10$

$= 571$

3) a) voir tableau.

b) $D : y = 133z + 184$

$\Rightarrow N = 133 \ln(10) + 184$

$= 490$

c) $N \geq 600$

$\Rightarrow y = 133z + 184$

$\Rightarrow 133z \geq 416$

$\Rightarrow z \geq \frac{416}{133}$

$\Rightarrow z \geq 3,12$

$\Rightarrow z = \cancel{4}\,3,12$

$\Rightarrow x = e^{3,\cancel{12}}$

$\Rightarrow x = \cancel{24}\ 23$

$\Rightarrow$ le nbre de visiteurs dépassera 600 au cours du 23 semaine

Exercice 3.

1) a) Nature de C_m

- si $m=0 \Rightarrow C_0 = (xx')$
- si $m>0 \Rightarrow C_m$ Ellipse.
- si $m<0 \Rightarrow C_m$ hyperbole.

b) Foyers – Sommets de C_m, $m>1$

$m \geq 1$: $C_m : x^2 + \frac{y^2}{(\sqrt{m})^2} = 1$

Alors C_m est l'ellipse de :

Sommets : $A(0,\sqrt{m})$; $A'(0,-\sqrt{m})$

$B(1,0)$; $B'(-1,0)$

Foyers : $F(0,\sqrt{m-1})$, $F'(0,-\sqrt{m-1})$

2) a) $H = C_{-1}$

$M \in (H) \Leftrightarrow Ré(z^2) = 1$

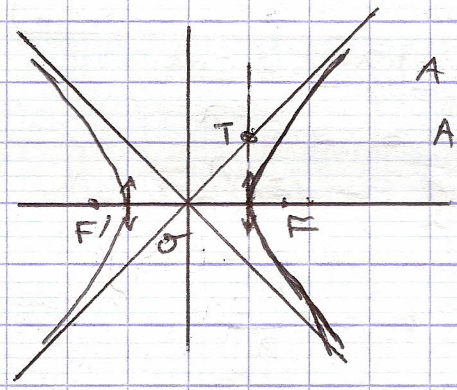
$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{-1} = 1$

$\Leftrightarrow M \in C_{-1}$

ccl : $(H) = C_{-1}$

b) Courbe de (H)



$A(1,0)$

$A'(-1,0)$

$F, F' \in C_{(O,OT)} \cap (AA')$

3) a) $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow Ré(jz)^2 = 1$

$Ré(jz)^2 = 1 \Leftrightarrow Ré\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x^2 - y^2 + 2ixy) = 1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \sqrt{3}xy = 1$

$\Leftrightarrow -x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}xy = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy + 2 = 0$

$\Leftrightarrow M \in (\Gamma)$

b) $\Gamma = \varphi(H)$?

· $M(z) \in (H) \Leftrightarrow Ré(z^2) = 1$

$M'(z') \in (\Gamma) \Leftrightarrow Ré(j^2 z'^2) = 1$

on pose $z' = j^2 \cdot z^2$

$\Rightarrow M'(z') = j^2 \cdot M(z)$

$\Rightarrow M' = R_{(O, -\frac{2\pi}{3})}(M)$

Ex4

1) Résolution de $5x - 3y = 11$.

• $(1, -2)$ sol de (E)

• $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(1+3k\,;\,-2+5k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$

2). a) $d = 1$ ou $d = 11$

$d = (3k+1) \wedge (5k-2)$

$= x \wedge y.$

$\Rightarrow d \mid x$ et $d \mid y$

$\Rightarrow d \mid 5x - 3y$

$\Rightarrow d \mid 11$

$\Rightarrow d = 1$ ou $d = 11$

b) $d = 11 \Leftrightarrow k \equiv 7\ [11]$

$d = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 0\ [11] \\ y \equiv 0\ [11] \end{cases}$

$x \equiv 0\ [11]$

$\Leftrightarrow 1 + 3k \equiv 0\ [11]$

$\Leftrightarrow 3k \equiv -1\ [11]$

$\Leftrightarrow 4 \cdot 3k \equiv -4\ [11]$

$\Leftrightarrow k \equiv 7\ [11]$

de m. $y \equiv 0\ [11]$

$\Leftrightarrow 5k - 2 \equiv 0\ [11]$

$\Leftrightarrow 5k \equiv 2\ [11]$

$\Leftrightarrow 5 \cdot 9 \cdot k \equiv 18\ [11]$

$\Leftrightarrow k \equiv 7\ [11]$

ccl $d = 11 \Leftrightarrow k \equiv 7\ (11)$

3). a) $M \in \Delta \Leftrightarrow 5a - 3b = 198$

or $a \wedge b = 18$

$\Rightarrow \begin{matrix} a = 18x \\ b = 18y \end{matrix} \quad x \wedge y = 1$

$\Rightarrow M \in D \Leftrightarrow 18(5x - 3y) = 198$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$

ccl $S = \{M(a, b)\}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 18(1+3k) \\ b = 18(-2+5k) \\ k \not\equiv 7\ [11] \end{cases}$

b) ~~min d(O,M)~~

M? OM est minimale.

$OM^2 = 18^2\left((1+3k)^2 + (5k-2)^2\right)$

$= 18^2(34k^2 - 14k + 5)$

k	$-\infty$		$7/34$		$+\infty$
$f'(n)$		$-$	0	$+$	
$f(n)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Comme $\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ k \not\equiv 7\ [11] \end{cases}$

$\Rightarrow k = 0$ ou $k = 1$

• $k = 0$, $OM = 18\sqrt{5}$

• $k = 1$; $OM = 18\sqrt{25} = 90$

ccl le pt le plus proche de O est $M(18, -36)$.

Exercice 5.

1) <u>Continuité de f_n sur $\mathbb{R}_+$</u>

• f_n $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (produit de fcts continues)

• En 0. $f_n(x) = x^n \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

* $n=0$; $f_0(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_0(x) = 0 = f_0(0)$

$\Rightarrow f_0$ $\mathcal{C}$ en 0^+.

* $n>0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{0^+} x^n \left(-\frac{1}{x}\right)^2 e^{-\frac{1}{x}}$

$= 0$ car $\lim\limits_{X \to -\infty} X e^X = 0$

$= f_n(0)$

$\Rightarrow f_n$ $\mathcal{C}$ en 0^+

ccl f_n $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}_+$

2) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} F_n(x) = I_n$.

• f_n est $\mathcal{C}$ sur $[0;1]$

Soit G_n une primitive sur $[0,1]$ de f_n.

$\Rightarrow F_n(x) = G_n(1) - G_n(x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} F_n(x) = G_n(1) - G_n(0)$

car G_n $\mathcal{C}$ en 0^+

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} F_n(x) = \int_0^1 G_n'(x)\,dt$

$= \int_0^1 f_n(x)\,dx$

$= I_n$

ccl. $\lim\limits_{x \to 0^+} F_n(x) = I_n$.

b) $F_0(x) = ?$

$F_0(x) = \int_x^1 f_0(t)\,dt$; $x>0$

$= \int_x^1 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}\,dt$

$= \left[e^{-\frac{1}{t}} \right]_x^1$

$= \frac{1}{e} - e^{-\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} F_0(x) = \frac{1}{e} = I_0$

$\Rightarrow I_0 = \frac{1}{e}$.

3) a) <u>Comparaison de $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$?</u>

$F_{n+1}(x) - F_n(x) = \int_x^1 t^{n-2} e^{-\frac{1}{t}} (t-1)\,dt$

Comme : $0 \leq x \leq t \leq 1$

$\Longrightarrow t - 1 \leq 0$

Alors $F_{n+1}(x) - F_n(x) \leq 0$

$\Longrightarrow F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$

b) Monotonie de (I_n)

$$\begin{cases} \cdot\ F_{n+1}(x) \leq F_n(x) \\ \cdot\ \lim\limits_{x \to 0^+} F_{n+1}(x) = I_{n+1} \\ \cdot\ \lim\limits_{x \to 0^+} F_n(x) = I_n \end{cases}$$

$\Longrightarrow I_{n+1} \leq I_n$

ccl : (I_n) est décroissante.

4) a) $x \in]0,1]$; $x^n F_0(x) \leq F_n(x) \leq F_0(x)$?

. on a : $x \leq t \leq 1$

$\Rightarrow x^n \leq t^n \leq 1$

$\Rightarrow x^n \dfrac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} \leq t^{n-2} e^{-\frac{1}{t}} \leq \dfrac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}$

Comme $t \longmapsto \dfrac{x^n}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}$, $t \longmapsto t^{n-2} e^{-\frac{1}{t}}$, $t \longmapsto \dfrac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}$ sont continues sur $]0,1]$

Alors $x^n \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt \leq F_n(x) \leq \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$

$\Rightarrow x^n F_0(x) \leq F_n(x) \leq F_0(x)$

b) Encadrement de I_n

$$\begin{cases} * \ x^n F_0(x) \leq F_n(x) \leq F_0(x) \\ * \ \lim\limits_{0^+} F_n(x) = I_n \\ * \ \lim\limits_{0^+} F_0(x) = \frac{1}{e} \end{cases}$$

$\Longrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{e}$

* Convergence de (I_n)

$$\begin{cases} \cdot\ (I_n) \text{ décroissante} \\ \cdot\ (I_n) \text{ minorée par } 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (I_n)$ cgte.

5) Relation entre $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$

$F_n(x) = \displaystyle\int_x^1 t^n \cdot \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt$

On pose : $u'(t) = \dfrac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \rightarrow u(t) = e^{-\frac{1}{t}}$

$v(t) = t^n \rightarrow v'(t) = n t^{n-1}$

Alors $F_n(x) = \left[t^n e^{-\frac{1}{t}} \right]_x^1 - n \displaystyle\int_x^1 t^{n-1} e^{-\frac{1}{t}} dt$

$\Rightarrow F_n(x) = e^{-1} - x^n e^{-\frac{1}{x}} - n F_{n+1}(x)$

ccl : $F_n(x) = \dfrac{1}{e} - x^n e^{-\frac{1}{x}} - n F_{n+1}(x)$

b) $I_n + n I_{n+1} = \dfrac{1}{e}$?

on a : $F_n(x) + n F_{n+1}(x) = \dfrac{1}{e} - x^n e^{-\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{0^+} F_n(x) = I_n$

$\lim\limits_{x \to 0^+} F_{n+1}(x) = I_{n+1}$

$\lim\limits_{0^+} x^n e^{-\frac{1}{x}} = 0$

Alors $I_n + n I_{n+1} = \dfrac{1}{e}$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$?

. (I_n) cgte $\Rightarrow \lim I_n = \lim I_{n+1} = l$.

. $I_{n+1} = \dfrac{1}{ne} - \dfrac{1}{n} I_n$; $n > 0$

$= \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{e} - I_n\right)$; $n > 0$

Alors $l = 0$.

ccl : $\lim I_n = 0$

6) a) $I_1 = \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k! + (-1)^n n! I_{n+1}$?

. $n = 1$, $I_1 + I_2 = \dfrac{1}{e}$ ✓

. Soit $n \geq 1$, suppose que $I_1 = \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k! + (-1)^n n! I_{n+1}$

Mq $I_1 = \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k k! + (-1)^{n+1} (n+1)! I_{n+2}$

on a

$$I_1 = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.k! + (-1)^n.n!\left(\frac{1}{e} - (n+1)I_{n+2}\right)$$

Car. $I_{n+1} + (n+1)I_{n+2} = \frac{1}{e}$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k! + (-1)^{n+1}(n+1)!\,I_{n+2}.$$

AR

<u>ccl</u> :

$$I_1 = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k! + (-1)^n n!\, I_{n+1}$$

b) <u>terme general de (I_n)</u>

$$\begin{cases} I_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n!}\left(I_1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.k!\right) \\ n \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(I_1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k.k!\right) \\ n \geq 2 \end{cases}$$

The END